Colle du ??? - Sujet 1
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0;2]$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

1. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0;2]$.
2. Déterminer l'unique valeur possible de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque celle-ci converge.
3. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = |u_n - 1|$. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.
4. Déterminer l et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2. Soient $n \geqslant 2$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $Q_n = X^n - X + 1$. Montrer que ces polynômes n'ont pas de racine multiple.

Colle du ??? - Sujet 2
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Soit $a > 0$.

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+a) - P(X) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X+a) - P(X) = X^2$.

Exercice 2. Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. A l'aide de la division euclidienne de n par m, déterminer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

Colle du ??? - Sujet 3
Suites et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise P. *On admettra l'initialisation.*

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose x_n l'unique solution de l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.